数理解析研究所講究録 1451 巻 2005 年 155-164

半 Abel 多様体に付随する Milnor K-群の motif 論的解釈

望月哲史 (Mochizuki Satoshi) *
東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo
mochi@ms.u-tokyo.ac.jp

0 序

このノートは、12 月の筆者の講演の survey である。残念ながら、紙面の都合で詳しく述べられない箇所は、[MI1], [MI2] を参照して戴きたい。又その後の進展については [MI3] を参照して戴きたい。まず [Som90] p.105 で提示された予想を引用しよう。

引用 0.1. (前略) We define and study Milnor K-groups $K(k, G_1, ..., G_r)$ attached to a finite family of semi-Abelian varieties $G_1, ..., G_r$ over a field k (中略) In the philosophy of motives, our K-group $K(k, G_1, ..., G_r)$ should be interpreted as follows. (中略), the Milnor K-group $K_r^M(k)$ is thought of as the 'motivic cohomology' $\mathrm{Ext}^r_{\mathcal{M}_k}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(r))$, where $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}_k}$ means the higher extension for the category $\mathcal{M}_k$ of motives over k. (中略), Deligne construct 1-motives $G_i[-1]$ over k from G_i. I expect that $K(k, G_1, ..., G_r)$ is isomorphic to $\mathrm{Ext}^r_{\mathcal{M}_k}(\mathbb{Z}, G_1[-1] \otimes ... \otimes G_r[-1])$.

一方 [Org04] の次の主定理 (c.f [TriCa]) も思い出そう。

定理 0.2 ([TriCa] 3.4, [Org04] Théorème 3.4.1).
充満忠実三角化函手 $\mathcal{D}^b(\text{1-IsoMot}(k)) \to \mathrm{Iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ が存在する。

この結果によって、予想は次の様に纏められる。

予想 0.3.
完全体 k 上の半 abel 多様体、G_1,...,G_r に対して、

$$K(k, G_1, ...G_r)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)}(\mathbb{Z}, G_1 \otimes ... \otimes G_r)$$

*This research is supported by the 21 century COE program at Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo.

が成立するか？ 但し、1-motif $G_1, ..., G_r$ を **定理** 0.2 の射 で、$\mathrm{Iso}\,\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ の対象と見倣している。

0.4. 上の notaiton で k が完全体で、$G_1 = \cdots = G_r = \mathbb{G}_m$ の場合は この予想は正しい。(c.f. [BKcon] Theorem 3.4 +[CohTh] Proposition 3.1.11 + [TriCa])

本ノートでは、この予想に関して著者が考えた事を紹介する。

謝辞 この一連の研究を通じて、斎藤毅先生、斎藤秀司先生、加藤和也先生、山崎隆雄先生、木村健一郎先生、竹田雄一郎先生、Bruno Kahn 先生に 有益な助言を戴いた事を感謝致します。

1 準備

この章では、序で述べた予想を詳しく解説する為に 基本的な notation の解説をする。

1.1 半 abel 多様体に付随する Milnor K 群

1.1. k 上の半 abel 多様体の有限族 $G_1,...,G_r$ に対して、加藤和也氏は次のような群を定義した。

$$K(k, G_1, ..., G_r) = \bigoplus_{L/k:\text{有限次拡大}} G_1(L) \otimes \cdots \otimes G_r(L) \Big/ \left\langle \begin{cases} \cdot\ \text{射影的公式} \\ \cdot\ \text{Weil 相互律} \end{cases} \right\rangle$$

$G_1(L) \otimes \cdots \otimes G_r(L) \ni a_1 \otimes \cdots \otimes a_r$ の類を $\{a_1, ..., a_r\}_{L/k}$ という様に表す。

例 1.2. この群は、$G_1 = \cdots = G_r = \mathbb{G}_m$ に対して、Milnor K 群 $K^M_r(k)$ と同型である。

$$K^M_r(k) \ni \{a_1, \cdots, a_r\} \mapsto \{a_1, ..., a_r\}_{k/k} \in K(k, \mathbb{G}_m, \cdots, \mathbb{G}_m)$$

例 1.3. C を k 上の k 有理点を持つ非特異代数曲線とする時、次の同型が成立する。

$$K(k, \mathrm{Jac}\, C, \mathbb{G}_m) \ni \{a, b\}_{E/k} \mapsto \mathrm{N}_{E/k}(a \cdot b) \in V(C)$$

ここで、$V(C)$ は S. Bloch 氏が定義した (c.f. [Blo81]) 次式で定まる群である。

$$V(C) = \frac{\mathrm{Ker}(\bigoplus_{x \in C^1} k(x)^\times \xrightarrow{\Sigma \mathrm{N}_{k(x)/k}} k^\times)}{\mathrm{Im}(K_2(K(C)) \xrightarrow{\oplus \partial_x} \bigoplus_{x \in C^1} k(x)^\times)}$$

歴史的には、半 abel 多様体に付随する Milnor$K$ 群は、$\mathbb{G}_m$ や代数曲線の Jacobian に対して、知られていた諸処の結果を統一する為に案出された。(詳細は、[MI1] 参照。)

1.2 幾何学的 motif の圏

1.4. 代数多様体を始域とする transfer 付きの函手を 反変的な函手と解する為には、代数多様体間の射を拡張しておくと便利である。例えば、k 上準射影的分離的有限型 smooth scheme の圏 Sm/k を部分圏として含む様に多様体間の射のクラスを拡張した圏 SmCor(k) を定義しておく。加法圏 SmCor(k) の定義と tensor 構造を述べると、
対象 : k 上準射影的分離的有限型 smooth scheme
$\mathrm{Hom}(Y,X) := \{Y$ から X への 有限全射的対応 $\}$
$X \otimes Y := X \times Y$
である。
例えば、K 上の smooth scheme 間の有限全射 $f : X \to Y$ について、f の転置 ${}^t f : Y \to X$ が SmCor(k) の射として定義出来る。つまり、$s(\Gamma_f) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{SmCor}(k)}(Y,X)$。ここで、$s : X \times Y \to Y \times X$ は switch 同型である。

1.5. 体 k 上の幾何学的 motif の圏 $\mathrm{DM_{gm}}(k)$ は、

$$\mathrm{DM_{gm}}(k) = \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)[\mathbb{Z}(1)^{-1}]$$

で定義されるので、$\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ の定義を述べる事から始める。$\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ は tensor 積構造を持った三角化圏であって、

$$\mathcal{H}^b(\mathrm{SmCor}(k)) \Big/ \left\langle \left\{ \begin{array}{l} \cdot\ \mathbb{A}^1_k\text{-homotopy 不変性} \\ \cdot\ \text{Mayer-Vietoris 完全列} \end{array} \right. \right\rangle \quad \text{の擬 abel 包}$$

として定まる。ここで、$\mathcal{H}^b(-)$ は、有界複体の homotopy 圏を表す。この圏は [BS01] に依って三角化圏である。
又 smooth scheme にその幾何学的 motif を対応させる自然な函手

$$\mathrm{M_{gm}} : \mathrm{SmCor}(k) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$$

が定まる。$\mathrm{M_{gm}}(\mathrm{Spec}\, k)$ は tensor 構造に関して単位的対象なので、$\mathbb{Z}$ と表す事にする。

例 1.6. $L/K/k$ を有限次拡大体とする。この時 標準射 $i : \mathrm{Spec}\, L \to \mathrm{Spec}\, K$ について $\mathrm{M_{gm}}({}^t i) : \mathrm{M_{gm}}(\mathrm{Spec}\, K) \to \mathrm{M_{gm}}(\mathrm{Spec}\, L)$ なる射を得る。この射は $\mathrm{N}_{L/K}$ と書かれるべきであろう。という所為は、k が完全体の時、次の可換図式が知られているからである。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathrm{M_{gm}}(\mathrm{Spec}\, L), \mathbb{Z}\{n\}) & \xrightarrow{\sim} & K^M_n(L) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}(\mathrm{N}_{L/K}, \mathbb{Z}\{n\})} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{N}_{L/K}} \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{M_{gm}}(\mathrm{Spec}\, K), \mathbb{Z}\{n\}) & \xrightarrow{\sim} & K^M_n(K). \end{array}$$

(c.f. [BKcon] Lemma 3.4.4.)

1.7. 次に Tate 対象 $\mathbb{Z}(1)$ の定義であるが、射影的 bundle 公式

$$\mathrm{M_{gm}}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[2]$$

を期待して、

$$\mathbb{Z}(1) := \text{homotopy fiber}(\mathrm{M_{gm}}(\mathbb{P}^1) \overset{\mathrm{M_{gm}}(str.)}{\longrightarrow} \mathbb{Z})[-2]$$

と定める。更に $\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$ とおいて任意の $A \in \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ について、次のように定める。

$$\begin{cases} A(n) = A \otimes \mathbb{Z}(n) \\ A\{n\} = A \otimes \mathbb{Z}(n)[n] \\ A((n)) = A \otimes \mathbb{Z}(n)[2n] \end{cases}$$

次の定理は $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ と $\mathrm{DM_{gm}}(k)$ の関係を表している。

1.8. *(c.f. [Voe02] 簡約定理)*
k を完全体とする。 各 $A,\ B \in \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ について自然な射

$$?\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}(1)} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)}(A(1), B(1))$$

は同型。 従って 標準埋め込み

$$\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k) \to \mathrm{DM_{gm}}(k)$$

は充満忠実。

1.3 1-motif

この節では、Deligne の 1-motif ([Del74]) を簡単に復習する。

記法 1.9.
加法圏 $\mathcal{C}$ に対して、同伴 $\mathbb{Q}$-線形圏 を $\mathrm{Iso}\,\mathcal{C}$ で表す。つまり

$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{Iso}\,\mathcal{C} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Iso}\,\mathcal{C}}(-,-) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

と定める。

定義 1.10 (1-motif).
k 上の 1-motif の圏 1-Mot(k) を $C((\mathrm{Spec}\,k)_{fppf})$ の充満部分圏で可換群 k-scheme の長さ 1 の複体

$$M = [X \to S]$$

からなるものとする。ここで、X は次数 -1 に位置し、étale local に有限生成自由 Abel 群と同型で、S は次数 0 に位置し半 Abel 多様体である。

記法 1.11 (1-isomotif).
Iso 1-Mot(k) を 1-IsoMot(k) と表して、 1-IsoMot(k) の対象を 1-isomotif という。

命題 1.12. *([Org04] 3.2.2、3.2.4)*
1-IsoMot(k) は *Abel* 圏であり *cohomology* 次元 $\leqq 1$ である。

2 Motif 論的相互律

さて、**予想** 0.3 を信じるならば、何故

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM_{gm}}(k)}(\mathbb{Z}, G_1 \otimes \ldots \otimes G_r)$$

は Weil 相互律を充たすのであろうか？ という自然な問いかけが生じる。この章では、Weil 相互律の復習から始めて、その辺りの事情を分析したい。更に詳しい詳細は、[MI1] 参照。

2.1. まず $f,g \in k(t)$ に対する 古典的な二つの等式

$$\sum_{v:k(t)/k \text{ の place}} deg(v)\ v(f) = 0$$

$$\prod_{v:k(t)/k \text{ の place}} \mathrm{N}_{k(v)/k}(f,g)_v = 1$$

を思い起こそう。(後者を Weil 相互律と呼んだ。 (c.f. [Wei67] Ch. III $n°4$)) この等式は、Milnor 氏 (c.f. [Mil70])、Bass 氏と Tate 氏 (c.f.[BT73])、 加藤和也氏 そして最終的には、Suslin 氏に依って Milnor K 群を使って次のように統一化・一般化されている。

2.2. *(Milnor K 群の相互律 c.f. [Sus82])*
K を k 上の代数関数体とする。 この時、非負整数 n について次の合成は零射

$$K^M_{n+1}(K) \overset{\oplus \partial_v}{\to} \bigoplus_v K^M_n(k(v)) \overset{\Sigma \mathrm{N}_{k(v)/k}}{\to} K^M_n(k)$$

思索 2.3. Milnor K 群 は motivic cohomology 群と解せる、つまり 一般の体 F について、

$$K^M_n(F) = \mathrm{H}^n_{\mathcal{M}}(\mathrm{Spec}\, F, \mathbb{Z}(n))$$

が成立する (c.f. [BKcon] Theorem 3.4) ので、上の定理はこの同型を通じて motivic cohomolgy 群の相互律と解せる。我々はより一般の motivic cohomolgy 群に対する相互律を知りたいので、(例えば 後述の点付き曲線に付随する motivic cohomology 群) より本源的な形の相互律が必要である。

理想的定理 2.4. *(Motif 論的相互律)*
2.2 の notation で 次の合成は 幾何学的 motif の圏の pro-圏 Pro-$\mathrm{DM_{gm}}(k)$ の中で零射

$$\mathrm{M_{gm}}(\mathrm{Spec}\,k)\{1\} \xrightarrow{\Sigma \mathrm{N}_{k(v)/k}\{1\}} \prod_v \mathrm{M_{gm}}(\mathrm{Spec}\,k(v))\{1\} \xrightarrow{\prod \partial_v} \mathrm{M_{gm}}(\mathrm{Spec}\,K)$$

2.5. 何故 上の形の statement が本源的なのであろうか？ その訳を説明しよう。各 motif $A \in \mathrm{DM_{gm}}(k)$ と $\mathrm{M_{gm}}(X) = \{\mathrm{M_{gm}}(X_i)\}_{i \in I} \in$ Pro-$\mathrm{DM_{gm}}(k)$ に対して次のように motivic cohomology 群を定義するのは自然である。

$$\mathrm{H}^n_{\mathcal{M}}(X, A(q)) = \mathrm{inj}\lim \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM_{gm}}(k)}(\mathrm{M_{gm}}(X_i), A(q)[n]).$$

もし k が完全体ならば、簡約定理 1.8 を使って、motif 論的相互律から全ての n と q に対して 次の合成が零射である事が従う。

$$\mathrm{H}^{n+1}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Spec}\,K, A(q+1)) \xrightarrow{\oplus \partial_v} \bigoplus_v \mathrm{H}^n_{\mathcal{M}}(\mathrm{Spec}\,k(v), A(q)) \xrightarrow{\Sigma \mathrm{N}_{k(v)/k}} \mathrm{H}^n_{\mathcal{M}}(\mathrm{Spec}\,k, A(q))$$

まず次の定理が成り立つ事に依り **理想的定理** 2.4 は机上の空論でない事が判る。

定理 2.6. *([MotIn] Corollary 5.25)*
k を完全体とする時 motif 論的相互律から Milnor K 群の相互律が従う。

2.7. 上記の定理の証明の問題点は、0.4、1.6 及び 2.5 等を鑑みれば、 pro-motif の圏の中で定義された residue 写像 が tame 記号と両立するか？ という事を問いている。正確には K/k の離散付値 v に対して、次の可換図式を示した。

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(\mathrm{M_{gm}}(\mathrm{Spec}\,K), \mathbb{Z}\{n+1\}) & \xleftarrow{\sim} & K^M_{n+1}(K) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\partial_v, \mathbb{Z}\{n+1\})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (-1)^n \partial_v} \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{M_{gm}}(\mathrm{Spec}\,k(v)\{1\}, \mathbb{Z}\{n+1\}) & \xleftarrow{\sim} & K^M_n(k(v))
\end{array}$$

これは 人工的に作られたような tame 記号に幾何学的な意味を与えている (例えば、[MI1] 2.13 参照)。

筆者は、k が特異点解消を許す完全体である時 次の結果を得た。

定理 2.8. *([MotIn] Theorem 5.18)*
上の仮定の下で、motif 論的相互律は正しい。

3 Jacobi 多様体に対する予想の解決

思索 2.3 に述べた様に、Milnor K 群は motivic cohomology 群と解せられた。この様に 染川 K 群 も motivic cohomology 群と解釈出来る様に motivic cohomology 群の概念を拡張しておきたい。又、この 群は、$\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ の Hom 集合としても解釈され得るように定義したい。 この章では、点付き曲線に付随する motoivc cohomology 群の定義を与える。

3.1 埋め込み定理

$\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ の基本性質を調べる為に、[TriCa] に於いて Voevodsky は層論的手法を採用した。詳しく述べれば、彼は 層の圏を使って別の圏 $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$ を構成して、$\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ を $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$ に tensor 圏かつ三角化圏として充満忠実に埋め込んだ。つまり、$\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ の Hom 集合を層複体の hyper cohomology 群として記述出来る訳である。我々も予想に挑む為に層複体の hyper cohomology 群としての記述を利用するので、$\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$ の構成を簡単に復習しておく必要がある。

3.1. Sm/k 上の transfer 付き Nisnevich 層とは $\mathrm{SmCor}(k)$ から abel 群の圏への加法的反変函手であって Sm/k に制限した時に Nisnevich 層となる事である。$\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k))$ で transfer 付き Nisnevich 層の圏を表す。

例 3.2. k 上の smooth scheme X について、前層 $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{SmCor}(k)}(?, X)$ は transfer 付き Nisnevich 層である。(c.f. [TriCa] Lemma 3.1.2)。

3.3. $\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k))$ は abel 圏なので (c.f. [TriCa] Theorem 3.1.4) その 上に有界な複体の導来圏 $D^-(\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k)))$ が考えられる。k 上の effective motivic 複体の圏 $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$ はその cohomology 層が $\mathbb{A}^1_k$-homotopy 不変な対象からなる充満部分圏として定義される。k が完全体の時、$\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$ は三角化圏になる。(c.f. [TriCa] Proposition 3.1.13)。
但し $\mathrm{SmCor}(k)$ 上の反変函手が $\mathbb{A}^1_k$-homotopy 不変とは 全ての $X \in Sm/k$ について 射影 $X \times \mathbb{A}^1_k \to X$ が 同型 $F(X) \to F(X \times \mathbb{A}^1_k)$ を誘導する事とする。

$\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$ は別の表示も持つ。

3.4. $\Delta^\bullet$ を Sm/k の標準余単体的対象とする。Sm/k 上の transfer 付き前層 F に対して Sm/k 上の前層複体を $C_n(F) = \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^n, F)$ で微分を $\Delta^\bullet$ の境界作用素の交代和として定める。この複体は F の特異単体的複体と呼ばれる。k が完全体の時、Sm/k 上の各 transfer 付き前層 F に対して、複体 $C_*(F)$ の cohomology 前層 $h_i(F)$ とその Nisnevich 層化 $h_i^{Nis}(F)$ は $\mathbb{A}^1_k$-homotopy 不変である。 (c.f. [TriCa] Lemma 3.2.1).
つまり、$C_*(?) : \mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k)) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$ なる函手と解せられる。更に 函手 $C_*(?)$ は函手

$$\mathcal{R}C : D^-(\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k))) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$$

に拡張され、この函手は自然な埋め込みの左随伴函手である。函手 $\mathcal{RC}$ により

$$\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k) = D^{-}(\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k)))\,/\langle \mathbb{A}^1_k -\text{homotopy 不変}\rangle$$

と解せられる。(c.f. [TriCa] Proposition 3.2.3)

3.5. $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$ の tensor 構造は、上の表示を用いて $D^{-}(\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k))$ の tensor 構造から誘導される。$D^{-}(\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k))$ の tensor 構造は、まず smooth schemes X,Y について

$$\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \otimes \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y) := \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X \times Y)$$

で定義して、一般の transfer 付き前層は $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(?)$ の直和達による分解を用いて拡張する。

3.6. *(埋め込み定理 c.f. [TriCa] Theorem 3.2.6)*
次のような条件を充たし 次図を可換にする函手達が存在する。
1. 函手 i は 充満忠実で *dense* な像を持つ。

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}^b(\mathrm{SmCor}(k)) & \xrightarrow{L} & D^{-}(\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k)) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{RC}} \\
\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k) & \xrightarrow{\quad i \quad} & \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)
\end{array}$$

2. k 上の 各 *smooth scheme* X について $\mathcal{RC}(L(X))$ は $C_*(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X))$ と標準的に同型。
3. 全ての函手は、*tensor* 構造と三角化圏の構造を保つ。

3.2 点付き曲線に付随する motivic 複体

この項では、Jacobi 多様体に対する予想の類似の結果を紹介する。

3.7. k 上の k 有理点付き smooth 曲線 (C_1, x_1),...,(C_r, x_r) に付随する motivic 複体 $\mathbb{Z}((C_1, x_1) \wedge ... \wedge (C_r, x_r))$、或いは略して $\mathbb{Z}(C_1 \wedge ... \wedge C_r)$ を次の様に定義する。

$$\mathbb{Z}(C_1 \wedge ... \wedge C_r) = C^*(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(C_1, x_1) \otimes ... \otimes \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(C_r, x_r))[-r]$$

3.8. $\mathbb{Z}(\bigwedge_{i=1}^{r}(C_i, x_i))$ の $X \in Sm/k$ への制限は、Zariski 位相に関する層複体になっているので、motivic cohomology 群 $\mathrm{H}^n_{\mathcal{M}}(X, \bigwedge_{i=1}^{r}(C_i, x_i))$、或いは略して $\mathrm{H}^n_{\mathcal{M}}(X, \bigwedge_{i=1}^{r} C_r)$ を Zariski 位相に関する motivic 複体 $\mathbb{Z}(\bigwedge_{i=1}^{r}(C_i, x_i))$ の hyper cohomology として定義する。:

$$\mathrm{H}^n_m(X, \bigwedge_{i=1}^{r}(C_i, x_i)) = \mathbb{H}^n_{Zar}(X, \mathbb{Z}(\bigwedge_{i=1}^{r}(C_i, x_i)))$$

3.9. [TriCa] にある様に次が成立する。

$$\mathbb{H}^n_{Nis}(X, \mathbb{Z}(\bigwedge_{i=1}^{r}(C_i, x_i))|_X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(k)}(M(X), \mathbb{Z}(\bigwedge_{i=1}^{r}(C_i, x_i))[n])$$

更に k が完全体ならば、[CohTh] Proposition 3.1.11、により、次も成立する。

$$\mathbb{H}^n_{Zar}(X, \mathbb{Z}(\bigwedge_{i=1}^{r}(C_i, x_i))|_X) = \mathbb{H}^n_{Nis}(X, \mathbb{Z}(\bigwedge_{i=1}^{r}(C_i, x_i))|_X)$$

例 3.10. 点付き曲線 (C, x) が射影的である場合、次が成立する。

$$\mathrm{H}^1_{\mathcal{M}}(k, (C, x)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{CH}_0(C) \overset{\deg}{\to} \mathbb{Z})$$

例 3.11. X を k 上の滑らかな曲線として、X の良い compact 化 $\bar{X}$ とは、開埋込 $X \overset{j}{\hookrightarrow} \bar{X}$ で、 $\bar{X}$ が、k 上固有非特異曲線で $X_\infty = \bar{X} - X$ が $\bar{X}$ に affine 開近傍を持つ事である。
(C, x) を affine 点付き曲線で、その良い compact 化を $(\bar{X}, X_\infty)$ とすると、次が成立する。

$$\mathrm{H}^1_{\mathcal{M}}(k, (C, x)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty) \overset{\deg}{\to} \mathbb{Z})$$

ここに $\mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty)$ は、相対 Picard 群である。つまり、

$$\mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty) = \{(\mathcal{L}, t); \mathcal{L} : \bar{X}\text{上の直線束}, t : X_\infty\text{上での自明化}\}/\text{同型}$$

群算法は、$\otimes$, i.e., $(\mathcal{L}, t) \otimes (\mathcal{L}', t') = (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}', t \otimes t')$ で定まっている。

そして、 係数体 k に然るべき制限を加えると、次が示せる。

定理 3.12. *([MotIn] Theorem 5.31)*
$(C_1, a_1), ..., (C_n, a_n)$ を k 上射影的滑らかな点付き曲線とすると次が成立する。

$$K(k, \mathrm{Jac}\, C_1, ..., \mathrm{Jac}\, C_n) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(k)}(M(\mathrm{Spec}\, k), \mathbb{Z}(\bigwedge_{i=1}^{n} C_i)[n])$$

参考文献

[BS01] P. Balmer, M. Schlichting, *Idempotent completion of triangulated categories*, J. Algebra **236** (2001), p. 819-834.

[BT73] H. Bass and J. Tate, *The Milnor ring of global field*, Springer Lecture Notes in Math. **342** (1973), p. 349-446.

[Blo81] S. Bloch, *Algebraic K-theory and class field theory for arithmetic surface*, Ann. of Math. **114**, (1981), p. 229-266.

[Del74] P. Deligne, *Théorie de Hodge III*, Publ. Math. I.H.E.S. **44** (1974), p.5-78.

[Mil70] J. Milnor, *Algebraic K theory and quadratic forms*, Inventions Math. (1970), p. 318-344.

[MI1] S. Mochizuki, *Motivic interpretation of Milnor K-groups attached to semi-abelian varieties I*, private note, http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~mochi/happyou/resume1.html.

[MI2] S. Mochizuki, *Motivic interpretation of Milnor K-groups attached to semi-abelian varieties II*, private note, http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~mochi/happyou/resume2.html.

[MI3] S. Mochizuki, *Motivic interpretation of Milnor K-groups attached to semi-abelian varieties III*, private note, http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~mochi/happyou/resume3.html.

[MotIn] S. Mochizuki, *Motivic interpretation of Milnor K-groups attached to Jacobian varieties*, thesis.

[Org04] F. Orgogozo, *Isomotifs de dimension inférieure ou égale à un*, manuscripta math. **115** (2004), p. 339-360.

[Som90] M. Somekawa, *On Milnor K-groups attached at semi-Abelian varieties*, K-theory, 4 (1990), p. 105-119.

[Sus82] A. Suslin, *Menicke symbols and their applications in the K-theory of fields*, Procedings of a Conference held at Oberwolfach, June 16-20, 1980, Springer-Verlag, Berlin, 1982, p. 334-356.

[BKcon] A. Suslin and V. Voevodsky, *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles, Nato ASI series C, vol. 548, Kluwer, (2000), p. 117-189.

[CohTh] V. Voevodsky, *Cohomological theory of presheaves with transfers*, in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Annals of Mathematics Studies, vol **143**, Princeton University press, (2000), p. 87-137.

[TriCa] V. Voevodsky, *Triangulated categories of motives over field*, in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Annals of Mathematics Studies, vol **143**, Princeton University press, (2000), p. 188-254.

[Voe02] V. Voevodsky, *Cancellation theorem*, preprint, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0541/.

[Wei67] A. Weil, *Basic Number Theory*, Springer-Verlag (1967)